**Soluzioni del Tutorato di Statistica 1 del 12/03/2010**
**Docente: Prof.ssa Enza Orlandi**
**Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco**

**Esercizio 1.**
$X_1, ..., X_n$ è un campione casuale da $N(\mu, \sigma^2)$

$E[S] = E[\sqrt{\frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}] = E[\sqrt{S^2}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} E[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} E[\sqrt{U}]$ dove
$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
Ora $E[\sqrt{U}] = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}} u^{1/2} \frac{u^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-u/2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2} u^{n/2-1} e^{-u/2}}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} du = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$
quindi
$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$
Si ragiona in modo analogo per calcolare la varianza:
$Var(S) = \frac{\sigma^2}{n-1} Var(\sqrt{U})$
Ora $Var(\sqrt{U}) = E[U] - E[\sqrt{U}]^2 = (n-1) - 2(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})})^2$
Allora $Var(S) = \frac{\sigma^2}{n-1} \{(n-1) - 2(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})})^2\}$

**Esercizio 2.**
Sia $Z \sim N(0,1)$, $U \sim \chi^2_k$, se $Z$ e $U$ indipendenti, allora
$X = \frac{Z}{\sqrt{U/K}} \sim t(k)$
$E[X] = E[\frac{Z}{\sqrt{U/K}}] = E[Z]E[\frac{1}{\sqrt{U/K}}] = 0$
$Var(X) = Var(\frac{Z}{\sqrt{U/K}}) = E[\frac{Z^2}{U/k}] = kE[\frac{1}{U}]$
$E[\frac{1}{U}] = \frac{1}{\Gamma(k/2)} 2^{-k/2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} u^{\frac{k-2}{2}} e^{-u/2} du = \frac{\Gamma\frac{k-2}{2}}{\Gamma(k/2)} 2^{-k/2} 2^{(k-2)/2} = \frac{1}{k-2}$
Allora $Var(X) = \frac{k}{k-2}$

**Esercizio 3.**
$X_1, X_2$ un campione casuale estratto da $N(0,1)$.

1. $(X_2 - X_1)/\sqrt{2} \sim N(0,1)$
2. $(X_1 + X_2)^2/2/(X_2 - X_1)^2/2$ è il rapporto di due $\chi^2_1$ ovvero $\sim F(1,1)$
3. $\frac{(X_2 + X_1)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_1 - X_2)^2/2}} \sim t(1)$

**Esercizio 4.**
Dalla legge debole dei grandi numeri sappiamo che se $n > \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \delta}$ allora
$P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon^2) > 1 - \delta$
Dobbiamo stimare $n$ sapendo che: $P(|\bar{X} - \mu| < 0,25\sigma) > 0,95$
$\epsilon^2 = 0,25^2\sigma^2$, $1 - \delta = 0,95$ da cui $\delta = 0,05$ quindi
$n > \frac{\sigma^2}{(0,25)^2 \sigma^2 0,05}$ da cui $n > 321$

**Esercizio 5.**
Applichiamo la legge debole dei grandi numeri:
$P(|\bar{X} - \mu| < 0,5) > 95\%$
$\epsilon^2 = 0,5$, $1 - \delta = 0,95$ da cui $\delta = 0,05$ quindi
$n > \frac{1}{(0,5)^2 * 0,05}$ da cui $n > 80$